CONTRÔLE N° 2 DE MATHÉMATIQUES
Terminale spé M5
jeudi 7 octobre 2021

☞ **Calculatrice autorisée**

☞ **Toute piste de recherche, même non aboutie, figurera sur la copie.**

☞ Une attention particulière au **soin** et à la **rédaction** sera apportée.

☞ Le barème est **approximatif**, il sera augmenté si le sujet est trop long.

COURS 3 points

Donner les définitions suivantes :

① $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$

② $\lim\limits_{t\to +\infty} f(x) = -1$

EXERCICE 1. 7,5 points

Déterminer les limites suivantes et interpréter graphiquement si possible :

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x}{3x+2}\right)$ ② $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)\cos(x-2)}$ ③ $\lim\limits_{x\to+\infty} 4\sqrt{x}+2-x^2$ ④ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2+\sin(x)}{x^2+1}$

EXERCICE 2. 11 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$

① (a) Calculer u_1 et u_2.

(b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

(c) i. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.
Calculer $f'(x)$ puis en déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$.

ii. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n on a $u_n < 1$

② (a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$

(b) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ puis en déduire que la suite (u_n) est croissante.

(c) En déduire que la suite (u_n) converge.